Proof of Fermat's Last Theorem by Infinite Descent

إثبات نظرية فيرما الأخيرة باستخدام النزول اللانهائي

جمال حيمان * Djamel Himane

*LA3C, Laboratory Arithmetic, Coding, Combinatory and Formal calculation, Faculty of Mathematics, University of Science and Technology, Houari Boumediene "USTHB", Bab-Ezzouar, Algiers, Algeria.

*مختبر الحسابيات والترميز والتوافقيات والحساب الشكلي (LA3C)، كلية الرياضيات، جامعة هواري بومدين للعلوم والتكنولوجيا، الجزائر.

البريد الإلكتروني: dhimane@usthb.dz Email:

Abstract

Fermat's last theorem, one of the most challenging theories in the history of mathematics, has been conjectured by French lawyer Pierre de Verma in 1637. Since then, it was considered the most difficult and unsolvable mathematical problem. However, more than three centuries later, a first proof was proposed by the British mathematician Andrew Wiles in 1994, relying on 20th-century techniques. Wiles's proof is based on elliptic (oval) curves that were not available at the time when the theory was first proposed. Most mathematicians argued that it was impossible to prove Fermat's theorem according to basic principles of arithmetic, though Harvey Friedman's grand conjecture states that mathematical theorems, including Fermat's Last Theorem, can be solved in very weak systems such as the Elementary Function Arithmetic (EFA). Friedman's grand conjecture states that "every theorem published in the journal, *Annals of Mathematics*, whose statement involves only finitary mathematical objects (i.e., what logicians call an arithmetical statement) can be proved in EFA, which is the weak fragment of Peano Arithmetic based on the usual quantifier free axioms for $0, 1, +, \times$, $\exp$, together with the scheme of induction for all formulas in the language all of whose quantifiers are bounded."

Keywords: Fermat's Last Theorem, Harvey Friedman's grand conjecture.

ملخص

مبرهنة فيرما الأخيرة هي واحدة من أكثر النظريات شهرة في تاريخ الرياضيات، تم تخمينها من قبل المحامي الفرنسي بيير دو فيرما سنة 1637، وشكّلت تحدياً لعلماء الرياضيات طوال ثلاثة قرون ونصف، ولكن تم إثباتها من قبل الرياضي الإنكليزي "أندرو وايلز" عام 1994، بتضافر جهود مئات الرياضياتيين، بالاعتماد على تقنيات حديثة مستمدة من المنحنيات الإهليلجية (البيضاوية)، التي لم تكن متوفرة في الوقت الذي طرحت فيه النظرية أول مرة. ويرى معظم الرياضياتيين أنه يستحيل إثباتها وفق المبادئ الأساسية للحساب، على النقيض من تخمين أو فرضية هارفي فريدمان الكبرى (1999)، التي تنص على أن النظريات الأساسية في الحساب، التي تم نشرها في حوليات الرياضيات، يمكن إثباتها في النظم الضعيفة، بتوظيف المبادئ الأساسية في الحساب على غرار مبرهنة فيرما الأخيرة التي نسعى في هذه الورقة لإثباتها وفق هذه الفرضية.

كلمات مفتاحية: مبرهنة فيرما الأخيرة، تخمين فريدمان الكبير.

* <https://cs.nyu.edu/pipermail/fom/1999-April/003014.html>

مقدمة

بيير دو فيرما (Pierre de Fermat) عالم رياضيات ومحام فرنسي وُلد في 17 آب 1601 في (بيمون دو لومين، فرنسا Beaumont de Lomagne, France) وتوفي في 12 كانون الثاني 1665 في (كاستر Castres). (1) وكان مهتماً باللغات الأجنبية والأدب الكلاسيكي والعلوم القديمة، والرياضيات.

دراسة بيير دو فيرما للمنحنيات والمعادلات أثرت المحتوى المعرفي في زمانه من خلال إسهاماته بتعميم معادلات القطوع المكافئة العادية ومعادلة القطوع الزائدة المتعامدة، كما له الفضل في حساب التفاضل والتكامل.

وكتب إسحاق نيوتن أنَّ أفكاره المبكرة حول حساب التفاضل والتكامل قد جاءت مباشرة من طريقة فيرما في رسم الظلال (Fermat's way of drawing tangents).

شارك بيير دو فيرما بشكل مستقل في ابتكار الهندسة التحليلية باكتشافه المبدأ الأساسي لها، واخترع نظرية الاحتمالات بالتعاون مع (بليز باسكال Blaise Pascal).

وأجرى فيرما أبحاثاً عن وزن الكرة الأرضية، وانكسار الضوء، والبصريّات، وقَدّم مساهمات بارعة في نظرية الأعداد، ومنها نظريّته الأخيرة الموضّحة في الصورة أعلاه، فهي الدليل الذي ظلَّ يتحدّى جهود أفضل علماء الرياضيات لأكثر من ثلاثة قرون. وتتّص تلك النظرية بأنّه "لا يمكن تقسيم عدد مرفوع لأُس إلى مجموع عددين مرفوعين لنفس الأُس". (2) وعلى الرغم من جهود عدد كبير من علماء الرياضيات، إلا أنه لم ينشر لهذه الحدسية برهان صحيح حتى عام 1995 على يد أندرو وايلز (3)، أي بعد حوالي 358 سنة على حدسها. وتعد واحدة من أكثر المبرهنات شهرة في تاريخ الرياضيات، وكانت قبل برهان وايلز، مسجلة في موسوعة غينيس للأرقام القياسية تحت عنوان: أصعب معضلة في الرياضيات. وقد حثت هذه المعضلة على

تطوير نظرية الأعداد الجبرية خلال القرن التاسع عشر، كما أدت إلى البرهان على مبرهنة النمطية خلال القرن العشرين.

ومن أشهر أقوال فيرما (4):

- «من المستحيل لأيّ رقم مرفوع لأُس أكبر من 2 أن يُكتب كمجموع رقمين مرفوعين لنفس الأس. لديّ إثبات عجيب حقاً لهذا الاقتراح ولكنّ هذه الزاوية ضيقة جداً لاحتواء ذلك الإثبات».
- «أنا أكثر استثناءً واختلافاً عن أي رجلٍ في العالم».
- «ربّما ستشكرني الأجيال القادمة لأنّي أظهرت أنّ القدماء لم يعلموا كلّ شيء».
- «سأشاركك كلّ هذا كلّما رغبت في ذلك».
- «لقد وجدتُ عدداً هائلاً من النظريّات مفرطة الجمال».

طرق كلاسيكية لحل بعض المعادلات الديوفانتية

مفهوم المعادلة الديوفانتية: هي كل معادلة معاملاتها أعداد طبيعية أو صحيحة نسبية يطلب إيجاد حلول طبيعية أو نسبية صحيحة وقد تمتد إلى الأعداد الناطقة من أشهر الأمثلة لهذه المعادلات نذكر ثلاثيات فيثاغورس ومبرهنة فيرما الأخيرة. ولحل هذا النوع من المعادلات توجد عدة طرق، منها الكلاسيكية البسيطة إلى الحديثة في غاية الصعوبة والتعقيد، فلا يجب أن نخدع وراء الطرح البسيط لبعض هذه المعادلات فقد تخبئ لنا الكثير في جعبتها ولعل خير مثال معادلتنا الرئيسة وفي ذات الصدد نقتبس من مقولة عالم الرياضيات كارل فريدريش غاوس «لإن روعة هذه المعادلات تكمن في سهولة الطرح مع صعوبة الإثبات».

الطريقة الأولى: توظيف الموافقات في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية $\mathbb{Z}$

تعد هذه الطريقة سهلة وبسيطة لكنها جد فعالة لإثبات أن بعض المعادلات الديوفانتية لا تقبل حلاً أو عدداً محدوداً من الحلول وفق شروط معينة.

وترتكز بالأساس على إيجاد عدد طبيعي غير معدوم n وإثبات أن معادلتنا الجديدة بتزديد هذا العدد المختار بعناية ($\text{modulo } n$) لا تقبل حلاً فهي لا تقبل حلاً من أجل جميع الأعداد الصحيحة النسبية. انطلاقاً من مبدأ البرهان بعكس النقيض (Contraposition).

ومن الأمثلة التقليدية معادلة بيل - فيرما من الشكل :

$$x^2 - d y^2 = -1$$

حيث $d \equiv 3 (4)$ وهذا يعني أن العدد 1 - هو مربع بواقي بتريديد 4 وهذا أمر مستحيل .
من الضروري لكنه غير كافي كشرط لقبول المعادلة السابقة حلولاً لا يجب أن لا يقبل العدد d القسمة على 4 أو على عدد أولي من الشكل $4k + 3$.

الطريقة الثانية : استخدام برهان النزول اللانهائي لفيرما

البرهان بالنزول غير المنتهي (بالإنجليزية: Proof by infinite descent) هو نوع خاص من البراهين بالخلف، يعتمد على كون مجموعة الأعداد الطبيعية مرتبة بصفة كاملة، وأن هناك عدداً منتهياً من الأعداد الطبيعية التي تكون أصغر من عدد معين ما. من التطبيقات التي تستعمل هذا النوع من البراهين، البرهان على أن معادلة ما، لا تقبل أي حلول.

عادةً ما يُظهر المرء أنه في حالة وجود حل لمشكلة ما، وهو ما يرتبط إلى حد ما بعدد واحد أو أكثر من الأعداد الطبيعية، فهذا يعني بالضرورة وجود حل ثانٍ، يرتبط بواحد أو أكثر من الأعداد الطبيعية "الأصغر". وهذا بدوره يعني حلاً ثالثاً يتعلق بالأعداد الطبيعية الأصغر، مما يعني ضمناً الحل الرابع، وبالتالي الحل الخامس، وما إلى ذلك. ومع ذلك، لا يمكن أن يكون هناك عدد لا نهائي من الأعداد الطبيعية الأصغر حجماً، وبالتالي عن طريق الاستقراء الرياضي (تكرار نفس الخطوة) فإن الفرضية الأصلية - بوجود أي حل - غير صحيحة: إن صحتها تؤدي إلى تناقض.

هناك طريقة بديلة للتعبير عن ذلك، وهي افتراض وجود حل أو أكثر من الحلول أو الأمثلة. ثم يجب أن يكون هناك حل أصغر أو مثال. « مثال مضاد بسيط. ثبت بعد ذلك أنه في حالة وجود حل أصغر، يجب أن يعني وجود حل أصغر (بمعنى ما) مما يثبت مرة أخرى أن وجود أي حل سيؤدي إلى تناقض». تظهر الاستخدامات المبكرة لطريقة النزول اللانهائي في عناصر إقليدس. مثال نموذجي هو الخاصية 31 من الكتاب 7، حيث يثبت إقليدس أن كل عدد صحيح مركب (غير أولي) قابل للقسمة (في مصطلحات إقليدس "يقاس") على عدد أولي. تم تطوير هذه الطريقة لاحقًا بواسطة فيرما، الذي صاغ المصطلح واستخدمه غالبًا للمعادلات الديوفانتية يظهر المثال النموذجي هو عدم قابلية حل معادلة الديوفانتية $t^4 = r^2 + s^4$ وكلازمة حتمية لها معادلة فيرما الأخيرة من الدرجة الرابعة وهو البرهان الوحيد المتوفر فيما يخص هذه المعادلة لصاحبها فيرما. كما تم لاحقًا إثبات أن مكعب عدد طبيعي لا يمكن فصله إلى مكعبين لعددتين طبيعيتين آخرين من طرف الرياضي السويسري ليونهارت أويلر وهذا باعتماد نفس الطريقة.

أمثلة تطبيقية

1. أصمية العدد $\sqrt[n]{2}$ (Irrationality of $\sqrt[n]{2}$) حيث n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2.

معادلة فيرما $x^n + y^n = z^n$ تقبل حلاً غير تافهاً حيث $x = y$ تكافئ العدد $\sqrt[n]{2}$ هو عدد منطقي يكتب من الشكل $\sqrt[n]{2} = \frac{z}{x}$ أي إثبات أصمية العدد $\sqrt[n]{2}$ تعني أن معادلة فيرما لا تقبل حلاً وفق الشروط السابقة.

نفرض أن $\sqrt[n]{2}$ عدد منطقي. إذن يمكننا كتابته على النحو $\sqrt[n]{2} = \frac{z}{x}$ حيث x و z عددين طبيعيين أوليان فيما بينهما، برفع إلى الأس النوني n لكلا طرفي المساواة نحصل على $2x^n = z^n$ وعليه 2 يجب أن يقسم z^n . لأن العدد 2 هو عدد أولي، يجب أن يقسم z حسب موضوعة إقليدس وعليه $z = 2r$ ، لبعض الأعداد الصحيحة r . وينتج عن ذلك $2x^n = (2r)^n = 2^n r^n$ أي $x^n = 2^{n-1} r^n$ مما يدل على أن 2 قاسم لـ x^n كذلك. لذلك $x = 2s$ لبعض الأعداد الصحيحة s . هذا يعطي $\frac{z}{x} = \frac{2r}{2s} = \frac{r}{s}$ ، لذلك إذا أمكن من كتابة $\sqrt[n]{2}$ كعدد منطقي، فيمكن دائماً كتابته كعدد منطقي به أجزاء أصغر، والذي يمكن كتابته مع أجزاء أصغر بعد، وهو ما يحقق لنا النزول اللانهائي. لكن هذا مستحيل في مجموعة الأعداد الطبيعية. بما أن العدد $\sqrt[n]{2}$ هو عدد حقيقي يمكن أن يكون منطقياً أو أصم، فإن الخيار الوحيد المتبقي هو أن يكون العدد $\sqrt[n]{2}$ أصم.

(بدلاً من ذلك، يثبت هذا أنه إذا كان $\sqrt[n]{2}$ عدداً منطقياً، فلن يكون هناك تمثيل "أصغر" ككسور، حيث إن أي محاولة للعثور على تمثيل "أصغر" z/x تعني وجود تمثيل أصغر، وهو تناقض ماثل). نخص بالذكر أصمية العدد $\sqrt{2}$ هو نموذج يدرس للطلبة وله باع طويل يرجع إلى فترة ما قبل الميلاد. بالضبط مع الفيلسوف اليوناني هيباسوس أحد أتباع المدرسة الفيثاغورية ويعتقد أنه أول من أثبت أن العدد $\sqrt{2}$ ليس ناطقاً وأشهره للعلن وأن هذا الأمر كان سرا من أسرار آلهة حبيس أسوار المدرسة الفيثاغورية وهو ما تسبب في هلاكه حسب اعتقادهم.

تنويه: أصمية العدد $\sqrt{2}$ يستلزم أن المعادلة الديوفنتية $x^n + y^n = z^n$ لا تقبل حلول صحيحة حيث $x = y$ ولهذا عند دراستنا لحلول معادلة فيرما الأخيرة نأخذ بعين الاعتبار الشرط $0 < x < y < z$.

2. عدم قابلية الحل للمعادلة $r^2 + s^4 = t^4$ وتبديلاتها (برهان فيرما).

إن عدم قابلية الحل للمعادلة $r^2 + s^4 = t^4$ في الأعداد الصحيحة تكفي لإظهار عدم قابلية الحل للمعادلة $q^4 + s^4 = t^4$ في الأعداد الصحيحة، وهي حالة خاصة لنظرية فيرما الأخيرة، وكانت الإثباتات التاريخية للأخير قد سارت على نحو أكثر اتساعاً في الإثباتات الأولى باستخدام النزول اللانهائي. يوضح الدليل الأكثر حداثة التالي على كلا هاتين الحالتين من خلال إثبات أنه لا يمكن أن يكون للمثلث فيثاغوري أي ضلعين من أضلاعه، كل منهما مربع أو تربيع مضاعف، حيث لا يوجد أصغر مثلث من هذا القبيل.

لنفترض وجود مثلث فيثاغوري. بعد ذلك، ومن ثم يمكن تخفيضها لإعطاء حلول أولية (أي، مع عدم وجود عوامل مشتركة غير 1) مثلث فيثاغوري له نفس الخاصية. يمكن كتابة جوانب مثلثات فيثاغورث الأولية $a + b$ ، حيث a و b عدنان نسبتي أوليان فيما بينهما ومع $x = 2ab$ ، $y = a^2 - b^2$ ، $z = a^2 + b^2$ عدد فردي وبالتالي y و z كلاهما فرديان. الخاصية التي y و z كل منهما فردي يعني أي منهما لا يمكن أن يكون مرتين مربع. علاوة على ذلك، إذا كانت x عبارة عن مربع أو مرتين في مربع، فإن كل من a و b هو مربع أو مرتين في المربع. هناك ثلاث حالات ، بناءً على الجانبين المقترضين لكل منهما مربع أو مرتين في المربع:

- **z و y:** في هذه الحالة y و z كلاهما مربعين. لكن المثلث القائم الذي يحوي على الضلعين $\sqrt{yz}$ و b^2 و الوتر a^2 أيضًا الأضلاع أعداد صحيحة، بما في ذلك الساق المربعة b^2 والوتر مربعاً (a^2)، وسيكون له وتر أصغر (a^2 مقارنة بـ $z = a^2 + b^2$).
- **z و x:** حيث z مربع. المثلث القائم ذو أطوال الصحيحة الذي يحوي على الضلعين a و b والوتر $\sqrt{z}$ سيكون له ضلعان (a و b) كل منهما مربع أو مرتين في المربع، ووتر أصغر ($\sqrt{z}$ مقارنة بـ z).
- **y و x:** حيث y مربع. المثلث القائم ذو أطوال الصحيحة الذي يحوي على الضلعين b و $\sqrt{y}$ والوتر a سيكون له ضلعان (a و b) كل منهما مربع أو مرتين في المربع، ووتر أصغر من المثلث الأصلي (a مقارنة بـ $z = a^2 + b^2$). في أي حالة من هذه الحالات، يوجد مثلث فيثاغوري واحد ذو ضلعين، كل منهما مربع أو تربيع مضاعف إلى مثلث أصغر، مما يؤدي بدوره إلى مثلث أصغر، وما إلى ذلك؛ وبما أن مثل هذا التسلسل لا يمكن أن يستمر بلا حدود، فإن الفرضية الأصلية التي تشير إلى وجود مثل هذا المثلث لا بد أن تكون خاطئة.

وهذا يعني أن المعادلات $r^2 + s^4 = t^4$ و $r^4 + s^2 = t^4$ و $r^4 + s^4 = t^2$ لا يمكن أن يكون لها حلول غير تافهة، لأن الحلول غير التافهة تعطي مثلثات فيثاغورس مع وجود ضلعين مربعين.

طريقة جديدة: المزاوجة بين الطريقتين السابقتين

سعيًا لابتكار طريقة جديدة بسيطة وفعالة من خلال المزاوجة بين الطريقتين السابقتين، وبالتحديد إثبات معادلة ديوفانتية معطاة لا تقبل حلولاً صحيحة نسبية بإثباتها لا تقبل حلولاً بترديد عدد طبيعي مختار بعناية، نستخدم طريقة النزول اللانهائي. ومثال نموذجي لهذه الطريقة مبرهنة فيرما الأخيرة التي سنتطرق إليها لاحقاً.

آراء ووجهات نظر في إدعاء فيرما (مبرهنة فيرما الأخيرة)

انقسم العلماء والباحثون في هذا المجال بين مؤيد ومشكك في إدعاء فيرما المثير للجدل، وفي هذا الصدد يقترح Van der Poorten أنه على الرغم من عدم وجود دليل على ذلك، فإن قلة التحديات تعني أن فيرما أدرك أنه لم يكن لديه دليل. ويقتبس من Weil قوله إن فيرما يجب أن يخدع نفسه لفترة قصيرة بفكرة يتعذر إصلاحها. والتقنيات التي استخدمها فيرما في مثل هذا "الدليل الرائع" غير معروفة. وعندما سئل عالم المنطق الرياضي الكبير ديفيد هيلبرت لماذا لم يحاول قط إثبات مبرهنة فيرما الأخيرة، أجاب «علي قبل ذلك، أن أخصص ثلاث سنوات لدراسة مركزة، وليس لدي مثل هذا الوقت لأبدده من أجل فشل محتمل». [5]

كما يروى أن العالم ليونهارت أولر خبير نظريات الأعداد أصيب بالإحباط لعجزه عن إثبات مبرهنة فيرما الأخيرة لدرجة أنه طلب من أحد أصدقائه تفتيش منزل فيرما بحثا عن أية مسودة تتضمن إثباتا لهذه المبرهنة.

وإذا أردنا أن ندلي بدلونا في الموضوع، فتارة نشكك كمعظم المشككين لتشابه الأسباب، وتارة أخرى نؤيده لنستقر على الرأي الأخير بناءً على أعماله وإنجازاته، ونعتقد أن عدم نشر فيرما لبرهانه، يعود لأحد السببين الرئيسيين أو كلاهما. الأول هو تفاهة البرهان وبساطته، وربما أراد فيرما تطويره وتحسينه ليكون في المستوى المنشود وهو المعروف بتبجحه، أما الثاني فهو شكوكه أو عدم اقتناعه بالطريقة المتبعة في البرهان، من بينها الاستدلال التدريجي الذي كانت لديه تحفظات حول الاستقراء الرياضي، وكذلك استخدام الموافقات أو خفض المعادلات في حلقة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$.

من جهة أخرى، نحاول الربط بين أعمال فيرما و مراسلته للباحثين في مجاله نذكر منهم على وجه الخصوص بليز باسكال الذي اقترن اسمه بفرع الاحتمالات وهذا ما دفعنا للتركيز على دستور ثنائي الحدين المعروف من قبل (binomial theorem) الذي تم تعميمه من طرف إسحاق نيوتن لاحقا ويعطى من الشكل :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}$$

كما يمكننا إثباته بواسطة استدلال بالتدرج وهنا يتم توظيف متطابقة باسكال $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ في هذا البرهان ومن نتائج هذا الدستور إثبات مبرهنة فيرما الصغرى وهي الأخرى يمكننا إثباتها باستخدام الاستدلال بالتدرج. نخص في حالة ما إذا كان n عددا أوليا فرديا وبأخذ $y = 1$ نحصل على:

$$(x+1)^n = C_n^0 x^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n \equiv x^n + 1 \pmod{n}$$

نتوه أنه إذا كان n عددا أوليا فإنه يقسم المعامل $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ إذا كان k محصورا بين 1 و $n-1$.

النظرية الرئيسية (مبرهنة فيرما الأخيرة)

"من المستحيل لأي رقم مرفوع لأش أكبر من 2 أن يكتب كمجموع رقمين مرفوعين لنفس الأش".

البرهان:

بالرجوع إلى أعمال فيرما، ومن جاء بعده، يعود إثبات المبرهنة إلى الحالات الخاصة للقوى n .

الحالة الأولى $n = 4$ تم إثباتها من طرف فيرما نفسه (3)، والحالة الثانية من أجل $n = p$ عدد أولي فردي.

سنعتمد على ثلاث عناصر أساسية كلها متسقة بانسجام مع أعمال فيرما والزمن الذي عاش فيه.

- إثبات أن المعادلة السابقة لا تقبل حل بترديد عدد أولي n فهي لا تقبل حلاً في جميع الأعداد الصحيحة Z .

- توظيف برهان النزول اللانهائي الذي طوره فيرما على الخاصية السابقة أي إثبات أن المعادلة السابقة لا تقبل حل بترديد عدد أولي n فهي لا تقبل حلاً في جميع الأعداد الصحيحة Z .

- توظيف مبرهنة فيرما الصغرى "Fermat's Little Theorem" من أجل كل عدد أولي فردي

p لدينا $x^p \equiv x; \quad y^p \equiv y; \quad (x + y)^p \equiv x + y \pmod{p}$ وينتج عنه

$$(x + y)^p \equiv x^p + y^p \pmod{p}$$

بتوظيف البرهان النزول اللانهائي لفيرما يمكننا بسهولة إثبات أصمية العدد $\sqrt[n]{2}$ وهو ما يؤكد إذا ما كانت الثلاثية (x, y, z) حلاً لمعادلة فيرما فإن $x \neq y$. بفرض $x < y$ يكون لدينا $0 < x < y < z$.

لنبين الآن بواسطة البرهان النزول اللانهائي لفيرما من أجل كل عدد أولي فردي p أن المعادلة $x^p + y^p = z^p$ لا تقبل حل بترديد p (modulo p).

وعليه نفرض وجود حل للمعادلة $x^p + y^p = z^p$ بترديد p حيث: $0 < x < y < z$ ونبين وجود حل أصغر وفق نفس الشروط السابقة.

من خلال المتباينة المضاعفة $0 < x < y < z$ يمكن استنتاج وجود أعداد صحيحة موجبة تماماً a, b, c حيث تحقق المساويات التالية: $x + a = z$ ، $x + b = y$ ، $y + c = z$ علماً أن:

$$0 < b < a \quad \text{و} \quad 0 < c < a$$

بتطبيق مبرهنة فيرما الصغرى نحصل على:

$$x^p + y^p = z^p = (x+a)^p \equiv x^p + a^p \pmod{p}$$

بطرح x^p من الطرفين نحصل على:

$$a^p \equiv y^p = (x+b)^p \equiv x^p + b^p \pmod{p}$$

إذن المعادلة $x^p + b^p = a^p$ تقبل حلاً بتريديد p (modulo p) حيث $0 < x < b < a < z$ أو $0 < b < x < a < z$ في كلتا الحالتين نحصل على أصغر من الفرض يحقق الشروط السابقة، فيكون حسب مبدأ البرهان النزول اللانهائي المعادلة $x^p + y^p = z^p$ لا تقبل حلاً بتريديد p ، وبالتالي لا تقبل حلاً في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ وهنا نكون قد أثبتنا مبرهنة فيرما الأخيرة وفق فرضية فريدمان الكبرى.

References

مراجع

1. Ribenboim P (1979). « 13 Lectures on Fermat's Last Theorem ». New York: Springer Verlag .
2. Darmon, H., Diamond, F., & Taylor, R. (1995). Fermat's last theorem. Current developments in mathematics, 1995(1), 1-154.
3. Wiles, A. (1995). Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. Annals of mathematics, 141(3), 443-551.
4. <https://www.brainyquote.com/authors/pierre-de-fermat-quotes>, accessed 01 July 2020
5. سيمون سنك، مبرهنة فيرما الأخيرة، ترجمة عطية عاشور، عدنان الحموي، مجلة العلوم، عدد يناير/كانون الثاني 1999، مؤسسة الكويت للتقدم العلمي.