الشَّرْطُ الرِّياضِيُّ لِلْمِثَالِ الْمُضَادِّ لِحَدْسِيَةِ غُولدباخِ القَوِيَةِ

The mathematical Constraint of the Counterexample of Goldbach's strong conjecture

أحمد هزايمة، وزارة التعليم، إربد، الأردن.

ahmad.hazaymeh@ses.yu.edu.jo

د. خالد هزايمة، جامعة اليرموك، الأردن.

khazaymeh@yu.edu.jo

سكينة هزايمة، جامعة اليرموك، الأردن.

sukaina.hazaymeh@ses.yu.edu.jo

ملخص:

قَدَّمنا في هذه الورقة برهاناً يُثبِتُ استحالة وجود مثال مضاد لحُدسية غولدباخ القوية، عبر خُطوتين: الأولى: أعدنا صياغةً حدسية غولدباخ القوية بدلالة الطَّرح. الثانية: استنتجنا الشرط الرياضي الذي يجب أن يتحقق في أي عدد زوجي ليكون مثالاً مضاداً لحُدسية غولدباخ القوية. ثم برهنّا على أن أي مثال مضاد سيحقق الشرط الرياضي هذا، فهو مثالٌ مضادٌّ إما أنه سيتناقض مع مبرهنة لانهاية الأعداد الأولية، وإما أنه سيتناقض مع مبرهنة كثافة الأعداد الأولية. لذلك كانت النتيجة المنطقية هي الحكم بأنه لا وجود لأي مثال مضاد لحُدسية غولدباخ، و بانتفاء وجود المثال المضاد للحُدسية فإن حدسية غولدباخ القوية ستكون حدسية صحيحة.

مقدمة

اكتشف إقليدس مبرهنةً لا نهائية الأعداد الأولية في القرن الثالث قبل الميلاد، أما غولدباخ فقد اكتشف حدسيته عام 1742م، لقد كانت طريقة إقليدس طريقةً بسيطةً برهن بها على أن هناك دائماً عدداً أولياً خارج المجموعة التي يُفترض أنها هي المجموعة النهائية للأعداد الأولية. ونحن اليوم بعد 23 قرناً سندستعمل الطريقة نفسها التي استعملها إقليدس، وهي الافتراض أن مجموعة الأعداد الأولية مجموعةً نهائيةً للبرهنة على صواب حدسية غولدباخ القوية.

1. حدسية غولدمباخ القوية بدلالة الطرح

تنص حدسية غولدمباخ القوية على ما يأتي: "كل عدد زوجي أكبر من 4 هو مجموع عددين فرديين أوليين". بدايةً سنعيد صياغة حدسية غولدمباخ باستعمال دلالة الطرح، وسنسمي هذه الصياغة الجديدة بـ "حدسية غولدمباخ القوية بدلالة الطرح" للتمييز بينها وبين حدسية غولدمباخ القوية بدلالة الجمع.

ستنص حدسية غولدمباخ القوية بدلالة الطرح على ما يأتي: "كل عدد زوجي أكبر من 4 إذا طرَحْنَا منه جميع الأعداد الفردية الأولية الأصغر منه (كل عدد أولي على حدة) فسيكون أحد نواتج الطرح عددًا فرديًا أوليًا، وسيحدث هذا على الأقل مرة واحدة".

مثال 1: مثال على عدد زوجي طرَحْنَا منه جميع الأعداد الفردية الأولية الأصغر منه.

$17=3-20$
$15=5-20$
$13=7-20$
$9=11-20$
$7=13-20$
$3=17-20$
$1=19-20$

إذا كان ناتج طرح عدد أولي من عدد زوجي يساوي عددًا أوليًا فإن مجموع العددين الأوليين يساوي العدد الزوجي نفسه.

مثال 2: مثال على أن مجموع عددين أوليين هو عدد زوجي.

$20=17+3$
$20=13+7$

2. ثلاثة احتمالات

سؤال: إذا طرحنا من عدد زوجي جميع الأعداد الفردية الأولية الأصغر منه، فما هي احتمالات نواتج الطرح؟
الجواب: ثلاثة احتمالات.

الاحتمال 1: ستكون نواتج الطرح مرةً أعدادًا فردية أولية و مرةً أعدادًا فردية مضاعفة، (انظر مثال 1 السابق).
إذا كان هذا الاحتمال هو ما سيتحقق فإن حدسية غولدباخ القوية ستكون صحيحة.

الاحتمال 2: ستكون نواتج الطرح أعدادًا فردية أولية فقط. إذا كان هذا الاحتمال هو ما سيتحقق فإن حدسية غولدباخ القوية ستكون صحيحة أيضًا.

الاحتمال 3: ستكون نواتج الطرح أعدادًا فردية مضاعفة فقط، إذا تحقق هذا الاحتمال فسيكون مثالاً مضاداً للحدسية، وعندئذٍ ستكون الحدسية خطأ.

3. فرض أول

لقد وصل التحقق من صواب حدسية غولدباخ القوية إلى العدد الزوجي (4×10^{18}) وهو عدد كبير، لكنه لن يبرهن على صواب الحدسية؛ لأنه سيبقى دائمًا هنالك فرضٌ يتبَلَّلُ في النفس، وهو " أليس من الجائز أن يكون هناك عددٌ زوجي ما، إذا طرحنا منه جميع الأعداد الفردية الأولية الأصغر منه (كل عددٍ أولي على حدة) فسيكون جميع نواتج الطرح أعدادًا فردية مضاعفة فقط؟! ". و بقول آخر " أليس من الجائز أن يكون هناك مثالٌ مضادٌ لحدسية غولدباخ القوية".

1.3.3 المثال المضاد (ك)

لأن وجود المثال المضاد محتمل، فيجب البرهنة الآن على أحد احتمالين: إما أن المثال المضاد موجود، وهو ما سيُبرهن على خطأ الحدسية، وإما أنه غير موجود، وهو ما سيُبرهن على صواب الحدسية.

حتى يكون المثال المضاد موجوداً لا بدّ من تحقُّق ما يأتي:

أولاً: يجب أن تكون مجموعة الأعداد الأولية منتهية.

سنفترض أن مجموعة الأعداد الأولية المنتهية هي $(2, 3, 5, 7, \dots, y)$ حيث العدد (y) هو آخر عدد أولي.

ثانياً: نضرب جميع الأعداد الأولية معاً.

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times y)$$

قبل أن ننقل إلى (ثالثاً) سنشرح المثال الآتي:

أ. سنفرض مثلاً أن مجموعة الأعداد الأولية المنتهية هي فقط: (2, 3, 5, 7).

ب. سيكون ناتج ضرب المجموعة المنتهية هو: (210).

ج. إذا طرحنا من العدد (210) جميع الأعداد الفردية الأولية الأصغر منه، وهي: (2, 3, 5, 7) فقط؛ لأننا افترضنا

أن هذه المجموعة هي مجموعة الأعداد الفردية الأولية فقط، فإن ناتج كل عملية طرح سيكون عدداً فردياً

من مضاعفات العدد الأولي الذي طرحناه من العدد الزوجي، كما يأتي:

جدول 1: يبين الجدول أن ناتج كل عملية طرح سيكون عدداً فردياً من مضاعفات العدد الأولي الذي طرحناه

من العدد الزوجي

$3 = [3 - (7 \times 5 \times 2)]$ $(69 \times 3) = [3 - (70 \times 3)]$ $207 = [3 - 210]$ <p>حيث (207) عدد فردي من مضاعفات العدد الأولي 3</p>
$5 = [5 - (7 \times 3 \times 2)]$ $(41 \times 5) = [5 - (42 \times 5)]$ $205 = [5 - 210]$ <p>حيث (205) عدد فردي من مضاعفات العدد الأولي 5</p>
$7 = [7 - (5 \times 3 \times 2)]$ $(29 \times 7) = [7 - (30 \times 7)]$ $203 = [7 - 210]$ <p>حيث (203) عدد فردي من مضاعفات العدد الأولي 7</p>

ثالثاً: بعد أن ضربنا جميع الأعداد الأولية معاً، (تذكر المثال السابق عند قراءة "ثالثاً").

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times y = k)$$

سيكون ناتج الضرب عدداً زوجياً لأننا ضربنا جميع الأعداد بالعدد 2، وسنُسمي العدد الزوجي المفترض هذا بـ

(ك). إذا طرحنا من العدد الزوجي المفترض (ك) جميع الأعداد الفردية الأولية الأصغر منه فسيكون ناتج كل

عملية طرح عدداً فردياً مضاعفاً من مضاعفات العدد الأولي الذي طرحناه من العدد الزوجي المفترض.

جدول 2 : يبين الجدول أن ناتج كل عملية طرح سيكون عددًا فرديًا مضاعفًا من مضاعفات العدد الأولي الذي طرحناه من العدد الزوجي المفترض

$(ك) - (3) = (3 - ك)$ حيث العدد $(3 - ك)$ عدد فردي من مضاعفات العدد الأولي (3)
$(ك) - (5) = (5 - ك)$ حيث العدد $(5 - ك)$ عدد فردي من مضاعفات العدد الأولي (5)
$(ك) - (7) = (7 - ك)$ حيث العدد $(7 - ك)$ عدد فردي من مضاعفات العدد الأولي (7)
$(ك) - (ي) = (ي - ك)$ حيث العدد $(ي - ك)$ عدد فردي من مضاعفات العدد الأولي (ي)

ومن ثمَّ سنجد أن العدد الزوجي المفترض (ك) قد حَقَّقَ الفَرَضَ السابق الذي يَفْتَرِضُ أنه "من الجائز أن يكون هناك عددٌ زوجي ما، إذا طرحنا منه جميع الأعداد الفردية الأولية الأصغر منه (كلُّ عددٍ أولي على حِدَةٍ) فسيكون جميع نواتج الطرح أعدادًا فردية مضاعفة فقط"، و بقول آخر إن العدد الزوجي المفترض (ك) هو مثالٌ مضادٌ لحدسية غولدمباخ القوية، وهو ما يُبرهن على خطأ الحدسية. ولكن، تَدَكَّر...

لقد نتج المثال المضاد (العدد الزوجي المفترض "ك") من مقدمة خاطئة، وهي أن مجموعة الأعداد الأولية مجموعة نهائية، ولما كانت الحقيقة هي أن مجموعة الأعداد الأولية مجموعة لا نهائية (راجع مثالاً مبرهنة إقليدس)، فإن هذه الحقيقة ستَنفي وجودَ المثال المضاد (العدد الزوجي المفترض "ك"). لأنه إما أن يكون المثال المضاد موجودًا، وإما أن تكون الأعداد الأولية مجموعة لا نهائية، لكن لن يكون كلا الاحتمالين صحيحين معًا، لأن هذا سيكون تناقضًا.

$$1. \quad (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times y = k)$$

$$2. \quad (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times k \leftarrow \neg k)$$

$$3. \quad (\neg k \leftarrow \text{غولدباخ صحيحة})$$

وبطريقة أخرى، إذا كان المثال المضاد لحدسية غولدباخ القوية (العدد الزوجي المفترض "ك") غير موجود فإن حدسية غولدباخ القوية بدلالة الطرح سوف تكون حدسية صحيحة. وإذا كانت حدسية غولدباخ القوية بدلالة الطرح صحيحة فإن حدسية غولدباخ القوية بدلالة الجمع ستكون صحيحة أيضاً.

4. فَرَضٌ ثَانٍ

حسنًا، إذا كان العدد الزوجي (ك) يتناقض وجوده مع مبرهنة لا نهائية الأعداد الأولية؛ لأنه عددٌ نتج من مقدمة خاطئة، "أليس من الجائز أن يكون هناك عددٌ زوجي له وجودٌ فعلي قد يكون مثالاً مضاداً لحدسية غولدباخ القوية، بحيث إذا طرحنا منه جميع الأعداد الفردية الأولية الأصغر منه (كل عددٍ أولي على حدة) فسيكون جميع نواتج الطرح أيضاً أعداداً فرديةً مضاعفة فقط؟".

1.4 تعميم الشرط (المثال المضاد "ل")

لِنَتَذَكَّرْ، أن العدد الزوجي المفترض (ك) قد صار مثالاً مضاداً للحدسية؛ لأنه عددٌ نتج عن ضرب جميع الأعداد الأولية الأصغر منه، أي:

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times y = k)$$

إذن، لكي يكون أي عدد زوجي مثالاً مضاداً لحدسية غولدباخ القوية فيجب على ذلك العدد أن يُحَقِّقَ الشرطَ الذي حَقَّقَهُ العددُ الزوجي المفترض (ك)، أما شرطُ تَحَقُّقِ المثالِ المضادِ لحدسية غولدباخ القوية فهو:

" حتى يَتَحَقَّقَ المثالُ المضادِ لحدسية غولدباخ القوية فيجب على العدد الزوجي أن يتساوى حاصلُ ضربِ جميع الأعداد الأولية الأصغر منه مع قيمة العدد الزوجي نفسه"، و سنُسَمِّي العدد الزوجي الذي يُحَقِّقُ هذا الشرطَ بالعدد (ل)، أي:

$$1. \quad (2, 3, 5, 7, \dots, m) > l$$

$$2. \quad (2 \times 5 \times 5 \times 7 \times \dots \times m = l)$$

حيث إن:

ل: عدد زوجي له وجودٌ فعليٌّ.

م: آخر عدد أولي أصغر من العدد الزوجي (ل).

2.4 حدسية جديدة

الآن لننظر الى العبارة الآتية ستبدو لنا كأنها بديهية، لكننا إذا دققنا النظر فيها جيداً سنكتشف أنها حدسية. أما هذه العبارة فهي:

"حاصل ضرب جميع الأعداد الأولية الأصغر من أي عدد زوجي لا يتساوى مع قيمة العدد الزوجي نفسه"، أي:

$$1. \quad (2, 3, 5, 7, \dots, m) > l$$

$$2. \quad (2 \times 5 \times 5 \times 7 \times \dots \times m \neq l)$$

حيث إن:

ل: عدد زوجي له وجودٌ فعليٌّ.

م: آخر عدد أولي أصغر من العدد الزوجي (ل).

جدول 3: أعداد زوجية حيث حاصل ضرب جميع الأعداد الأولية الأصغر من العدد الزوجي لا يساوي قيمة العدد الزوجي نفسه. (أي إن الأعداد الزوجية لا تحقق الشرط الذي حققه العدد الزوجي المفترض "ك")

العدد الزوجي	حاصل ضرب الأعداد الأولية الأصغر من العدد الزوجي $\neq$ العدد الزوجي
6	$6 \neq 5 \times 3 \times 2$
10، 8	$10 \neq 7 \times 5 \times 3 \times 2$ أو 8
12	$12 \neq 11 \times 7 \times 5 \times 3 \times 2$
16، 14	$16 \neq 13 \times 11 \times 7 \times 5 \times 3 \times 2$ أو 14

لو كانت العبارة السابقة بديهية، لكان هذا كافيًا لصياغة البرهان الآتي:

"إذا كان من المستحيل أن يكون حاصل ضرب جميع الأعداد الأولية الأصغر من أي عدد زوجي مساويًا لقيمة العدد الزوجي نفسه، إذن فمن المستحيل أن يوجد مثال مضاد للحدسية".

$$1. \quad (2, 3, 5, 7, \dots, m) > n$$

$$2. \quad (2 \times 5 \times 5 \times 7 \times \dots \times m) \neq n$$

$$3. \quad ((2 \times 5 \times 5 \times 7 \times \dots \times m) \neq n) \leftarrow \neg n$$

$$4. \quad (\neg n \leftarrow \text{غولدباخ صحيحة})$$

و لكن لماذا العبارة السابقة هي حدسية لا بديهية؟ الجواب : لأنه من الجائز افتراضًا أن يكون هناك عدد زوجي له وجود فعلي يساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الأولية الأصغر منه.

3.4 الفجوة غير المنطقية

إذا كان من الجائز افتراضًا أن يكون هناك عدد زوجي له وجود فعلي يساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الأولية الأصغر منه. فهل وجود هذا العدد الزوجي ممكن من الناحية الفعلية ؟

الجواب :لا؛ لأنه سينتج من وجود هذا النوع من المثال المضاد فجوة غير منطقية، إذ ستنشأ ما بين العدد (م) الذي هو آخر عددٍ أوليٍّ أصغر من العدد الزوجي و بين العدد الزوجي (ن) الذي هو حاصل ضرب جميع الأعداد الأولية الأصغر منه ستنشأ فجوة هائلة جدًا و خالية من أي عدد أولي، إن وجود هذه الفجوة الهائلة جدًا و الخالية من أي عدد أولي يتناقض مع مبرهنة كثافة الأعداد الأولية.أي:

$$1. \quad (2, 3, 5, 7, \dots, m) > n$$

$$2. \quad (2 \times 5 \times 5 \times 7 \times \dots \times m) = n$$

$$3. \quad \{ m > (\text{فجوة هائلة جدًا خالية من أي عدد أولي}) > n \}$$

مثال: إذا افترضنا أن العدد الزوجي (6,469,693,230) الذي هو حاصل ضرب أول عشرة أعداد أولية فقط.

$$(6,469,693,230 = 29 \times 23 \times 19 \times 17 \times 13 \times 11 \times 7 \times 5 \times 3 \times 2)$$

إذا افترضنا أن العدد الزوجي هذا هو مثالٌ مضادٌ للحدسية، فسيترب على هذا الأمر أن يصير العدد الأولي (29) هو العدد (م)، أي سيكون هو آخر عددٍ أوليٍّ أصغر من العدد الزوجي نفسه، و عليه ستنشأ فجوة هائلة جدًا بين العدد (29) و بين العدد الزوجي (6,469,693,230) و ستكون فجوة هائلة جدًا و خالية من أي عدد أولي.

$$\{ 29 > (\text{فجوة هائلة جدًا خالية من أي عدد أولي}) > 6,469,693,230 \}$$

إن وجود هذه الفجوة الهائلة جدًا يتناقض مع مبرهنة كثافة الأعداد الأولية. إن النتيجة المنطقية هي أن العدد الزوجي الذي هو حاصل ضرب جميع الأعداد الأولية الأصغر منه هو عدد لا وجود له في الأعداد الطبيعية؛ لذلك لا نجد فجوات هائلة بين الأعداد الأولية.

5. النتيجة الختامية

إن أي مثال مضاد لحدسية غولدمباخ القوية هو مثالٌ مضادٌ إما أنه سيتناقض مع مبرهنة لانهاية الأعداد الأولية، وإما أنه سيتناقض مع مبرهنة كثافة الأعداد الأولية؛ لذلك فالنتيجة المنطقية هي الحكم بأنه لا وجود لأي مثالٍ مضادٍ لحدسية غولدمباخ، و بانتفاء وجود المثال المضاد للحدسية فإن حدسية غولدمباخ القوية ستكون حدسية صحيحة.